

*Keine Ahnung vom Bogenmaß*

Was ist das

***Bogenmaß ?***

Wie rechnet man damit

???

**Datei Nr. 16020**

Stand 9. 1. 2024

**FRIEDRICH W. BUCKEL**

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK  
UND STUDIUM

<https://mathe-cd.de>

## Vorwort

Wer sich nicht mehr erinnern kann, was es mit dem Bogenmaß auf sich hat, kann hier nachlesen, wie man diese Alternative zum Gradmaß berechnen kann.

Es ist hier nicht unwichtig, dass man auch versteht, wie man darauf kommt. Die Herleitung ist extrem einfach und kann helfen, sich vergessenes Wissen selbst wieder zurückzuholen.

Dann wird noch gezeigt, wie man die einfache Sinus- und Kosinuskurve zeichnet, denn dabei verwendet man meistens das Bogenmaß.

Das Bogenmaß wird auch im Text 16002 besprochen.

## Inhalt

Wiederholung: Berechnung eines Kreisausschnittes	3
Berechnung von Bogenlängen	4
Berechnung des Bogenmaßes zu den wichtigen Graden	5
Arbeiten mit dem Bogenmaß	6
Wie berechnet man das Gradmaß aus dem Bogenmaß?	6
Schaubilder der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion, Wertetafel	7

## Wiederholung: Berechnung eines Kreisausschnittes

In der Geometrie lernt man diese Formeln zum Kreis:

Ein Kreis mit dem Radius  $r$

hat den **Durchmesser**

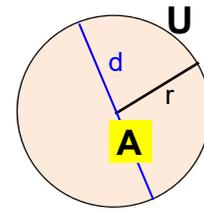
$$d = 2r$$

hat den **Umfang**:

$$U = 2\pi \cdot r$$

und den **Flächeninhalt**:

$$A = \pi \cdot r^2$$



### Wichtig ist die Berechnung eines Kreisausschnitts:

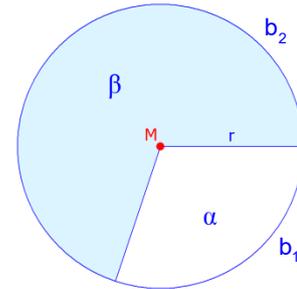
Aus einem Kreis wurde ein Flächenstück herausgeschnitten.

Da dieses bis zum Mittelpunkt reicht, heißt es **Kreisausschnitt**.

Dabei entstehen jedoch immer 2 Kreisausschnitte,

einer mit einem Mittelpunktwinkel  $\alpha$

und einer mit dem Mittelpunktwinkel  $\beta = 360^\circ - \alpha$ .



Die Berechnung von Inhalt und Bogenlänge des Ausschnitts geschieht über die Formeln des Kreises.

### Beispiele

- a) Für  $\alpha = 90^\circ$  liegt ein Viertelkreis vor, also ist der Inhalt auch nur ein Viertel der Kreisfläche und der Bogen ein Viertel des Kreisumfangs:

$$A = \frac{1}{4} \pi r^2 \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r = \frac{1}{2} \pi r$$

- b) Für  $\alpha = 120^\circ$  liegt ein Drittelkreis vor:

$$A = \frac{1}{3} \pi r^2 \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{3} \cdot 2\pi r = \frac{2}{3} \pi r$$

- c) Für Winkel wie  $\alpha = 72^\circ$  müssen wir den Bruchteil erst berechnen:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{72^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{5} \Rightarrow A = \frac{1}{5} \pi r^2 \quad \text{und} \quad b = \frac{1}{5} \cdot 2\pi r = \frac{2}{5} \pi r$$

- d) Allgemein rechnet man so:

$$A = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2 \quad (1) \quad \text{und} \quad b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r \quad (2)$$

Die Formel (2) zur Berechnung der Bogenlänge am Kreisausschnitt wird für das Thema Bogenmaß wichtig. Ich zeige, unter welchen Bedingungen man diese Bogenlänge zur Beschreibung der Größe des Mittelpunktswinkels verwenden kann.

## Berechnung von Bogenlängen

- (1) Der Mittelpunktswinkel sei  $\alpha = 45^\circ$

Dann heißt die Bogenlängen-Formel (2):  $b_r = \frac{45}{360} \cdot 2\pi r$  oder  $b_r = \frac{1}{4} \cdot \pi r$

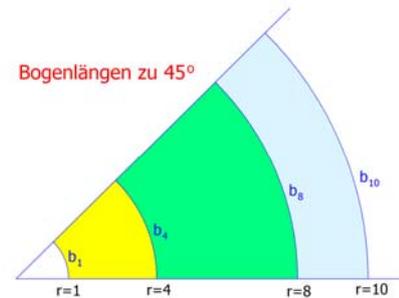
Die Abbildung zeigt dazu verschiedene Radien:

$$r = 1: \quad b_1 = \frac{1}{4} \pi \approx 0,79$$

$$r = 4: \quad b_4 = \pi \approx 3,14$$

$$r = 8: \quad b_8 = 2\pi \approx 6,28$$

$$r = 10: \quad b_{10} = \frac{5}{2} \pi \approx 7,85$$



Der Bogen ist umso länger, je größer der Radius r ist.

Daher kann man r auch als Index an b anhängen:  $b_r$ .

- (2) Der Mittelpunktswinkel sei  $\alpha = 90^\circ$

Dann heißt die Bogenlängen-Formel (2):  $b = \frac{90}{360} \cdot 2\pi r$  oder  $b_r = \frac{1}{2} \cdot \pi r$

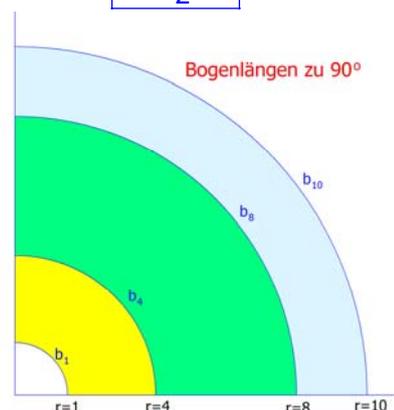
Die Abbildung zeigt dazu verschiedene Radien:

$$r = 1: \quad b_1 = \frac{1}{2} \pi \approx 1,57$$

$$r = 4: \quad b_4 = 2\pi \approx 6,28$$

$$r = 8: \quad b_8 = 4\pi \approx 12,57$$

$$r = 10: \quad b_{10} = 5\pi \approx 15,71$$



Wenn jeder einen Kreisausschnitt zu einem verabredeten Winkel, sagen wir  $\alpha = 75^\circ$ , zeichnet und die Bogenlänge berechnet, dann hängt sein Ergebnis natürlich vom gewählten Radius ab.

Will man vergleichbare Bogenlängen, muss man sich auf einen einheitlichen Radius einigen.

Und man hat sich geeinigt:

**Für das sogenannte Bogenmaß verwendet man  $r = 1$ .**

### *Aufgabe:*

Berechne das Bogenmaß (also für den Radius  $r = 1$ ) zu folgenden Mittelpunktswinkeln.

Bei a) und b) schreibe das Ergebnis als Vielfaches von  $\pi$  auf, also ohne Taschenrechner.

Bei c) ermittle mit dem Taschenrechner eine Dezimalzahl als Bogenlänge.

a)  $360^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $30^\circ$ .

b)  $720^\circ$ ,  $540^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $150^\circ$ .

c)  $24^\circ$ ,  $72^\circ$ ,  $100^\circ$ ,  $144^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  $425^\circ$ ,  $1350^\circ$ .

**Lösungen:**

Ich verwende die gekürzte Formel (2) mit  $r = 1$ :

$$b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi$$

a)  $\alpha = 360^\circ \rightarrow b = 2\pi$

$\alpha = 180^\circ \rightarrow b = \pi$

$\alpha = 90^\circ \rightarrow b = \frac{\pi}{2}$

$\alpha = 60^\circ \rightarrow b = \frac{\pi}{3}$

$\alpha = 45^\circ \rightarrow b = \frac{\pi}{4}$

$\alpha = 30^\circ \rightarrow b = \frac{\pi}{6}$



b)  $\alpha = 720^\circ \rightarrow b = 4\pi$

$\alpha = 540^\circ \rightarrow b = 3\pi$

$\alpha = 270^\circ \rightarrow b = \frac{3}{2}\pi$

$\alpha = 120^\circ \rightarrow b = \frac{2}{3}\pi$

$\alpha = 135^\circ \rightarrow b = \frac{3}{4}\pi$

$\alpha = 150^\circ \rightarrow b = \frac{5}{6}\pi$

Tipps:

Wenn du dir merkst, dass  $180^\circ$  das Bogenmaß  $\pi$  hat, dann hast du die Werte von a) sofort als Bruchteile bzw. Vielfache im Kopf.

c)  $\alpha = 24^\circ \rightarrow b = \frac{24}{180}\pi = \frac{2}{15}\pi \approx 0,419$

$\alpha = 72^\circ \rightarrow b = \frac{72}{180}\pi = \frac{2}{5}\pi = 1,257$

$\alpha = 100^\circ \rightarrow b = \frac{100}{180}\pi = \frac{5}{9}\pi \approx 1,745$

$\alpha = 144^\circ \rightarrow b = \frac{144}{180}\pi = \frac{4}{5}\pi \approx 2,513$

$\alpha = 210^\circ \rightarrow b = \frac{210}{180}\pi = \frac{7}{6}\pi \approx 3,665$

$\alpha = 425^\circ \rightarrow b = \frac{425}{180}\pi \approx 7,418$

$\alpha = 1350^\circ \rightarrow b = \frac{1350}{180}\pi = 7,5\pi \approx 23,562$

## Arbeiten mit dem Bogenmaß

Weil dieses Bogenmaß sich auf den einheitlichen Radius 1 bezieht, gibt es eine eindeutige Beziehung zwischen dem Gradmaß und dem Bogenmaß. Das bedeutet, dass man jedem Winkel eindeutig ein Gradmaß zuordnen kann, oder auch ein Bogenmaß.

Mit der Formel  $b = \frac{\alpha}{180^\circ} \cdot \pi$  kann man das Gradmaß ins Bogenmaß umrechnen.

Umgekehrt liefert  $\alpha = \frac{b \cdot 180^\circ}{\pi}$  zu jedem Bogenmaß den Winkel im Gradmaß.

Man schreibt oft als Einheit im Bogenmaß **rad** (=Radiant) hinter die Maßzahl.

Beispiel: Hat ein Winkel im Bogenmaß die Größe  $b = 1 \cdot \text{rad}$ , dann ist das  $\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$ .

Oder  $b = 4,5 \text{ rad} \rightarrow \alpha = \frac{4,5 \cdot 180^\circ}{\pi} \approx 257,83^\circ$

In der Geometrie verwendet man normalerweise immer das Gradmaß.

**Verwendet man aber Sinus, Kosinus und Tangens als Funktionen, dann ist es üblich, das Bogenmaß zu verwenden.**

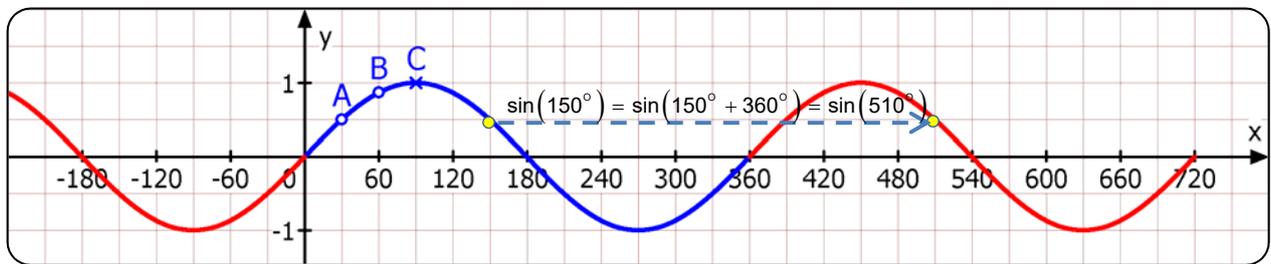
Es folgen die Schaubilder für  $f(x) = \sin(x)$  und  $f(x) = \cos(x)$ .

Drucke dir die nächsten beiden Seite aus! Das ist Grundwissen!

**Schaubilder der Sinusfunktion und Kosinusfunktion und eine Wertetabelle:**

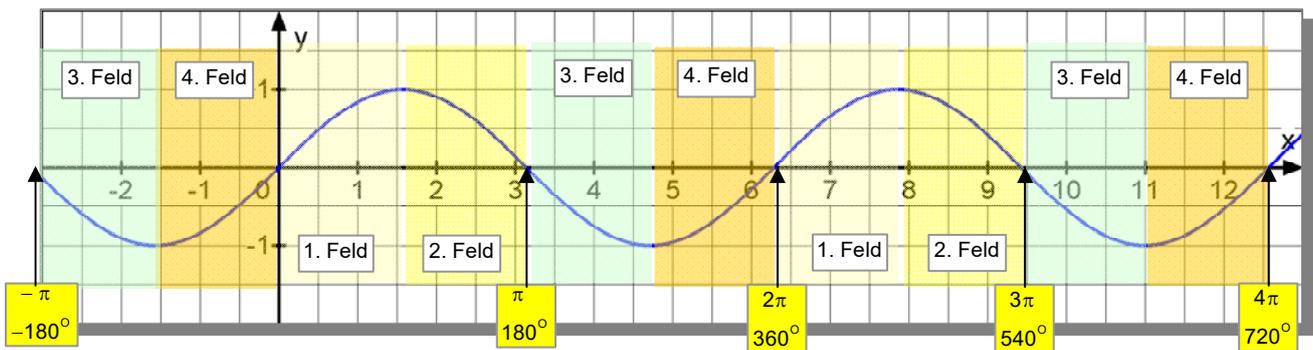
Einheit	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
x (rad)	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	$2\pi$
Grad	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
sin(x)	0	0,5	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 0,87	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\approx 0,87$	0,5	0	-0,5	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ -0,87	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ -0,87	-0,5	0
cos(x)	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\approx 0,87$	0,5	0	-0,5	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\approx -0,87$	-1	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\approx -0,87$	-0,5	0	0,5	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$ $\approx 0,87$	1

Trägt man die **Sinuwerte im Gradmaß** für beliebig große Winkel in einem Achsenkreuz auf, dann erhält man beispielsweise diese Sinuskurve:

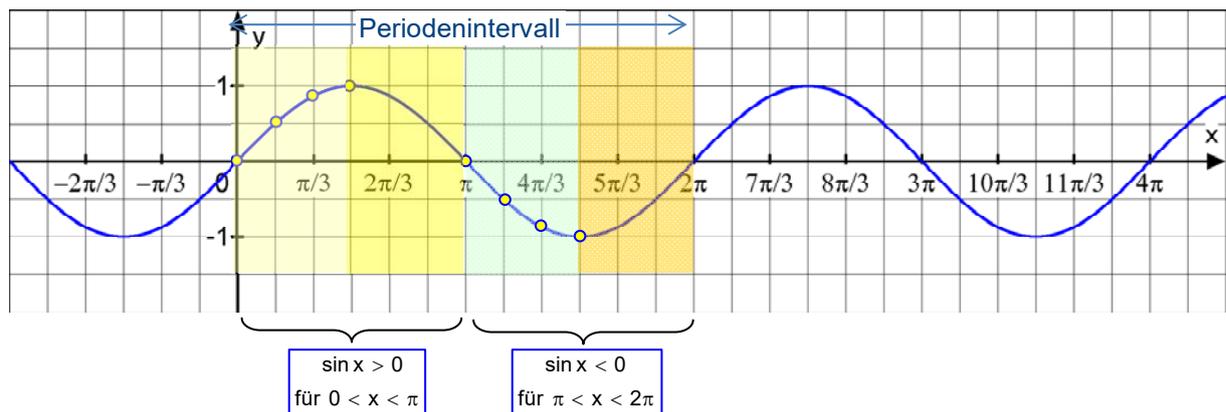


Jeden x-Achsen-Abschnitt der Länge  $360^\circ$  nennt man eine **Periode**. Hier sind zwei Perioden farblich markiert: Das übliche Grundintervall in blau von  $0^\circ$  bis  $360^\circ$ , dann eine weitere in rot.

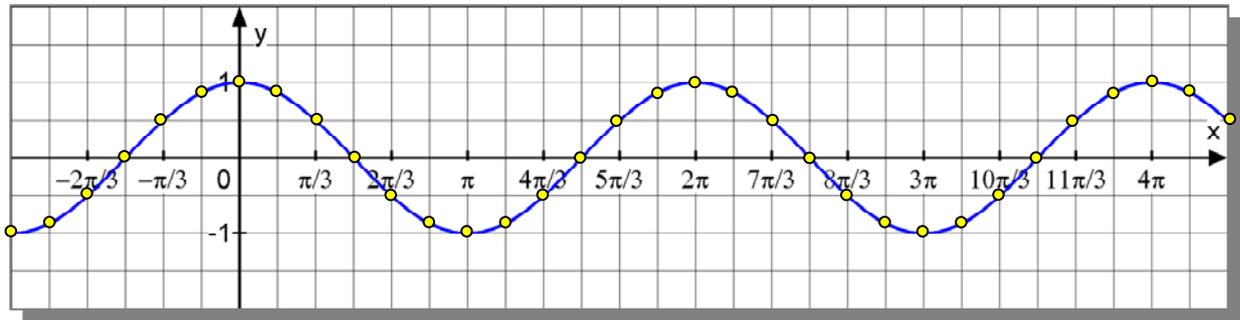
Die nächste Abbildung zeigt die **Sinuskurve mit dem Bogenmaß** auf der x-Achse. Die ganzzahligen Vielfachen von  $\pi$  sind auch im Gradmaß angegeben. Jetzt ist die **Periodenlänge**  $2\pi$ .



Man verwendet oft auf der x-Achse die Einheit so, dass  $\pi$  bei 3 eingezeichnet wird. Das vereinfacht.



### Schaubild der Kosinusfunktion und eine Wertetabelle:



### So zeichnet man eine Sinuswelle:

Man wählt den „Startpunkt“ im Ursprung.

Dann geht man 1 Kästchen nach rechts ( $\frac{1}{6}\pi$  bzw.  $30^\circ$ )

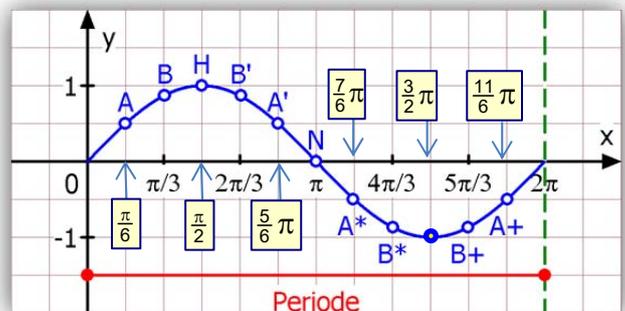
und um 0,5 nach oben (A).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ( $\frac{1}{3}\pi$  bzw.  $60^\circ$ )

und um  $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,87$  nach oben (B).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ( $\frac{1}{2}\pi$  bzw.  $90^\circ$ )

und um 1 nach oben (Hochpunkt H).



Ab jetzt wiederholen sich die Werte wie folgt:

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ( $\frac{2}{3}\pi$  bzw.  $120^\circ$ ) und um  $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,87$  nach oben (B').

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ( $\frac{5}{6}\pi$  bzw.  $150^\circ$ ) und um 0,5 nach oben (A').

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ( $\pi$  bzw.  $180^\circ$ ) und um 0 nach oben (Nullstelle N).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ( $\frac{7}{6}\pi$  bzw.  $210^\circ$ ) und um 0,5 nach unten (A\*).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ( $\frac{4}{3}\pi$  bzw.  $240^\circ$ ) und um  $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,87$  nach unten (B\*).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ( $\frac{3}{2}\pi$  bzw.  $270^\circ$ ) und um 1 nach unten (Tiefpunkt).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ( $\frac{5}{3}\pi$  bzw.  $300^\circ$ ) und um  $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0,87$  nach unten (B+).

Weiter um 1 Kästchen nach rechts ( $\frac{11}{6}\pi$  bzw.  $330^\circ$ ) und um 0,5 nach unten (A+).

Hinweis:

Die **Kosinuskurve** entsteht aus der Sinuskurve, indem man diese um  $\frac{\pi}{2}$  nach links verschiebt.